Extraits de deux Lettres addressées à M. Craig.

PAR M. HERMITE.

SUR LA FORMULE DE FOURIER.

* * * * Je suppose qu'on ait entre les limites $x = 0$, $x = 2\pi$:

$$f(x) = \Sigma A_m e^{mix},$$

l'indice m parcourant la série des nombres entiers, $0, \pm 1, \pm 2$, etc. Décomposons maintenant cette série en deux autres, et soit:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \Sigma A_m e^{mix},$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

puis:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \Sigma A_{-m} e^{-mix},$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

de sorte qu'on aura:

$$f(x) = \Phi(x) + \Psi(x).$$

Je vais établir que dans le demi plan situé au dessus de l'axe des abscisses, c'est à dire pour toutes les valeurs imaginaires, $z = x + iy$ où y est une quantité positive différente de zéro, on a cette expression:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x - z}{2} \, dx.$$

Et semblablement si l'on suppose y négatif:

$$\Psi(z) = -\frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x - z}{2} \, dx;$$

ce sera donc l'extension de chacune des fonctions, dans les régions considérées, qu'on obtient au moyen de $f(x)$, et en employant les seules valeurs réelles de la variable qui sont comprises entre $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Pour cela je fais usage des relations suivantes:

$$\int_0^{2\pi} e^{mix} \cot \frac{x - z}{2} \, dx = 4i\pi e^{miz},$$

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{x - z}{2} \, dx = 2i\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-mix} \cot \frac{x - z}{2} \, dx = 0,$$

qui ont lieu pour m positif, la variable z représentant un point dont l'ordonnée est positive. Elles font voir que dans l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x-z}{2} dx$, les termes affectés des coefficients A_m où l'indice est négatif, disparaissent, et nous en concluons immédiatement l'expression annoncée :

$$\Phi(z) = \frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x-z}{2} dx.$$

On a ensuite, dans la région inférieure du plan, m étant toujours un entier positif:

$$\int_0^{2\pi} e^{mix} \cot \frac{x-z}{2} dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{x-z}{2} dx = -2i\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-mix} \cot \frac{x-z}{2} dx = -4i\pi e^{-miz},$$

et ces relations nous donnent:

$$\Psi(z) = -\frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x-z}{2} dx.$$

A la formule de Fourier:

$$f(x) = \Sigma A_m e^{mix},$$

je joint ainsi la fonction uniforme dans tout le plan:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x-z}{2} dx$$

qui a l'axe des abscisses pour coupure, de sorte qu'en designant par N et N' deux points infiniment voisins, l'un au dessus l'autre au dessous de l'axe, on a la relation:

$$\Phi(N) - \Phi(N') = f(x).$$

Je remarquerai encore que la considération de cette coupure donne immédiatement les intégrales définies qui viennent d'être employées. Qu'on pose en effet:

$$J = \int_0^{2\pi} e^{mix} \cot \frac{x-z}{2} dx,$$

d'où:

$$Je^{-miz} = \int_0^{2\pi} e^{mi(x-z)} \cot \frac{x-z}{2} dx,$$

on trouve d'abord:

$$D_z(Je^{-miz}) = 0.$$

Soit donc $Je^{-miz} = C$, l'expression de cette constante par l'intégrale montre qu'elle s'évanouit pour z infiniment grand et au dessous de l'axe des abscisses; on a par conséquent $C = 0$ dans le demi plan au dessous de cet axe. Franchissons la coupure, l'intégrale en passant du point N' au point N l'augmente de $4i\pi$, et dans le demi plan au dessus de la coupure, on obtient

$$Je^{-miz} = 4i\pi,$$

d'où:

$$J = 4i\pi e^{miz}.$$

Mais j'ai supposé l'entier m positif et différent de zéro; on trouve quand il est

nul, $\cot\frac{x-z}{2} = -i\pi$, ou $+ i\pi$, pour une valeur infinie de z, au dessous puis au dessus de l'axe des abscisses, et l'on en conclut alors, $J = -2i\pi$, $J = +2i\pi$ pour chaucun des demi plans. Le cas de m négatif, se traiterait le même.

ADDITIONS.

En donnant communication à M. Lipschitz des résultats qui précédent, j'ai été informé qu'ils se trouvaient établis par une autre voie, dans son ouvrage Lehrbuch der Analysis, T. II, p. 724. La note suivante expose la méthode suivie par l'illustre géomètre.

Soit $f(x+iy)$ une fonction uniforme et continue pour toutes les valeurs $x+iy$, où $x^2+y^2 \leqq 1$, et qui prend pour $x+iy=0$ une valeur réelle, en outre soit désigné par $g(x+iy)$ la fonction, qui est conjugée à $f(x+iy)$. Alors pour chaque valeur $x+iy$ à l'intérieur du cercle $x^2+y^2<1$, on a l'expression

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(e^{i\alpha}) + g(e^{-i\alpha}))\left(\frac{1}{1-e^{-i\alpha}(x+iy)} - \frac{1}{2}\right)d\alpha.$$

En remplaçant la variable complexe $x+iy$ par la fonction exponentielle $e^{i\omega}$, la variable nouvelle ω doit avoir une partie imaginaire positive, et l'équation proposée prend la forme suivante:

$$f(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(e^{i\alpha}) + g(e^{-i\alpha}))\left(\frac{1}{1-e^{i\omega-i\alpha}} - \frac{1}{2}\right)d\alpha.$$

La démonstration est ramenée au théorème de Cauchy à l'aide de la remarque que le second facteur, qui se trouve sous le signe intégral, peut être écrit

soit $$\frac{1}{i}\left(\frac{d(e^{i\alpha})}{e^{i\alpha}-e^{i\omega}} - \frac{1}{2}\frac{d(e^{i\alpha})}{e^{i\alpha}}\right),$$

ou $$\frac{1}{i}\left(\frac{d(e^{-i\alpha})}{e^{-i\alpha}-e^{-i\omega}} - \frac{1}{2}\frac{d(e^{-i\alpha})}{e^{-i\alpha}}\right).$$

Cela étant l'intégrale proposée se trouve égale à la somme des deux intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\alpha})\left(\frac{d(e^{i\alpha})}{e^{i\alpha}-e^{i\omega}} - \frac{1}{2}\frac{d(e^{i\alpha})}{e^{i\alpha}}\right),$$

et $$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{-i\alpha})\left(\frac{d(e^{-i\alpha})}{e^{-i\alpha}-e^{-i\omega}} - \frac{1}{2}\frac{d(e^{-i\alpha})}{e^{-i\alpha}}\right).$$

En appliquant le théorème de Cauchy on voit facilement, que la première intégrale prend la valeur $f(e^{i\omega}) - \frac{1}{2}f(0)$, la seconde intégrale la valeur $\frac{1}{2}g(0)$. A cause de la supposition, que $f(0)$ doit être une quantité réelle, la différence $-\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}g(0)$ s'évanouit. Partant, la somme des deux intégrales s'égale à

la valeur $f(e^{i\omega})$, ce qu'il fallait prouver. Si l'on fait usage de l'équation

$$\frac{1}{1-e^{i\omega-i\alpha}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha-\omega}{2}\right),$$

le résultat en question passe dans la forme suivante :

$$f(e^{i\omega})=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(e^{i\alpha})+g\,(e^{-i\alpha})\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha-\omega}{2}\right)d\alpha.$$

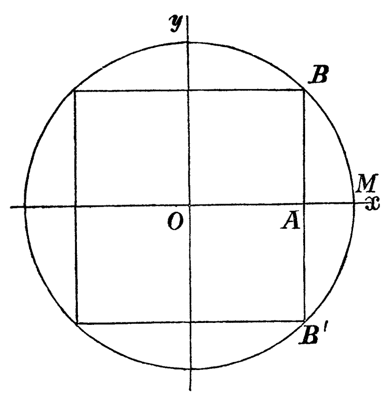
Sur une Formule de Gauss.

Dans le mémoire intitulé : De nexu inter multitudinem classium, etc. (Œuvres de Gauss, T. II, p. 269), on trouve l'expression suivante du nombre des valeurs entières de x et y qui satisfont à la condition : $x^2+y^2 \overline{\underline{<}} A$.

Soit r l'entier contenu dans $\sqrt{A}$, et q l'entier contenu dans $\sqrt{\frac{1}{2}A}$; désignons aussi par $r^{(q+1)}$, $r^{(q+2)}$, ... les entiers les plus voisins de $\sqrt{A-(q+1)^2}$, $\sqrt{A-(q+2)^2}$, ..., jusqu'à $\sqrt{A-r^2}$; le nombre cherché est :

$$4q^2+1+4r+8\left[r^{(q+1)}+r^{(q+2)}+\ldots.+r^{(r)}\right].$$

Pour démontrer cette formule je remarquerai d'abord qu'on obtient facilement le nombre des points dont les coordonnées sont des nombres entiers et qui sont à l'intérieur d'un rectangle ayant ses cotés parallèles aux axes et son centre à l'origine. Nommons la base et la hauteur $2a$ et $2b$, soit ensuite p et q les entiers contenus dans a et b, le produit $(2p+1)(2q+1)$ sera le nombre du points considérés qui sont à l'intérieur et sur le contour du rectangle.



Cela posé, inscrivons un carré dans le cercle $x^2+y^2=A$, on aura

$$OA=AB=\sqrt{\frac{1}{2}A},$$

et si l'on désigne par q l'entier contenu dans $\sqrt{\frac{1}{2}A}$, le nombre des points qui

sont dans le carré et sur son contour, sera $(2q + 1)^2$. Il faut maintenant y joindre ceux qui se trouvent dans les quatre segments égaux à BMB'; et dont voici l'énumération.

Sur AM nous avons en premier lieu les points dont les abscisses sont: $q + 1$, $q + 2, \ldots . r$, r désignant comme plus haut l'entier contenu dans $\sqrt{A}$; leur nombre est par conséquent, $r - q$.

A ces diverses abscisses correspondent les ordonnées:

$$\sqrt{A - (q + 1)^2},\ \sqrt{A - (q + 2)^2}, \ldots . \sqrt{A - r^2},$$

et en employant la notation de Gauss, nous avons sur la première un nombre de points égal à $r^{(q+1)}$, sur la seconde à $r^{(q+2)}$, etc.; donc dans le segment BMB', un nombre égal à:

$$r - q + 2\left[r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + \ldots . + r^{(r)}\right].$$

Quadruplons cette valeur et ajoutons à celle que nous avons obtenue pour le carré inscrit, on trouve la quantité

$$(2q + 1)^2 + 4(r - q) + 8\left[r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + \ldots . + r^{(r)}\right],$$

qui se réduit à l'expression de Gauss:

$$4q^2 + 1 + 4r + 8\left[r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + \ldots . + r^{(r)}\right].$$

D'une manière toute semblable s'obtient le nombre des points contenus à l'intérieur et sur le contour de l'ellipse:

$$Ay^2 + Bx^2 = N.$$

Soit à cet effet, en désignant par $E(x)$ l'entier contenu dans x:

$$y_\xi = E\left(\sqrt{\frac{N - B\xi^2}{A}}\right),\quad x_\eta = E\left(\sqrt{\frac{N - A\eta^2}{B}}\right),$$

$$a = E\left(\sqrt{\frac{N}{A}}\right),\qquad b = E\left(\sqrt{\frac{N}{B}}\right),$$

$$\alpha = E\left(\sqrt{\frac{N}{2A}}\right),\qquad \beta = E\left(\sqrt{\frac{N}{2B}}\right),$$

nous avons cette formule dont celle de Gauss est un cas particulier:

$$4\alpha\beta + 1 + 2(a + b) + 2(x_{\alpha+1} + x_{\alpha+2} + \ldots . + x_a)$$
$$+ 2(y_{\beta+1} + y_{\beta+2} + \ldots . + y_b).$$

SUR L'EXPRESSION DU SINUS PAR UN PRODUIT DE FACTEURS PRIMAIRES.

La formule suivante qui a été donnée pour la première fois par M. Weierstrass:

$$\sin x = x\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)e^{\frac{x}{n}}\right]\ (n = \pm 1, \pm 2, \ldots .),$$

conduit facilement à une expression semblable pour $\cos x$, au moyen de l'équation

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}.$$

Soit en effet, $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5$, etc., nous pouvons écrire :

$$\sin x = x\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{2n\pi}\right)e^{\frac{x}{2n\pi}}\right]\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{m\pi}\right)e^{\frac{x}{m\pi}}\right];$$

tous les facteurs de $\sin x$ se trouveront ainsi mis en évidence dans $\sin 2x$, on en conclut :

$$\cos x = \Pi\left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi}}\right].$$

Mais on pourrait désirer parvenir à cette expression, en partant de la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, c'est ce que je vais faire au moyen d'une remarque sur la formule générale :

$$F(x) = \Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{P_n(x)}\right],$$

où les polynômes $P_n(x)$ sont de degrés quelconques.

Changeons x en $x + \xi$, et employons l'identité :

$$1 - \frac{x+\xi}{a_n} = \left(1 - \frac{\xi}{a_n}\right)\left(1 - \frac{x}{a_n - \xi}\right);$$

on aura d'abord :

$$F(x+\xi) = \Pi\left[\left(1 - \frac{\xi}{a_n}\right)\left(1 - \frac{x}{a_n - \xi}\right)e^{P_n(x+\xi)}\right];$$

divisons ensuite membre à membre avec l'égalité :

$$F(\xi) = \Pi\left[\left(1 - \frac{\xi}{a_n}\right)e^{P_n(\xi)}\right]$$

et nous obtiendrons la formule

$$\frac{F(x+\xi)}{F(\xi)} = \Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n - \xi}\right)e^{P_n(x+\xi) - P_n(\xi)}\right].$$

D'une manière semblable, et en partant de la relation :

$$F(x) = x\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{P_n(x)}\right],$$

on trouverait :

$$\frac{F(x+\xi)}{F(\xi)} = \left(1 + \frac{x}{\xi}\right)\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n - \xi}\right)e^{P_n(x+\xi) - P_n(\xi)}\right].$$

Mais ce résultat appliqué à $\sin x$, en supposant $\xi = \frac{\pi}{2}$, donne l'expression suivante :

$$\cos x = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1 - \frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right];$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \text{etc.})$$

qui ne coïncide pas avec la formule obtenue tout-à-l'heure:

$$\cos x = \Pi \left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi}\right) e^{\frac{2x}{m\pi}}\right].$$

On remarque toutefois qu'en posant $m = 2n - 1$, les facteurs exponentiels $e^{\frac{x}{n\pi}}$ et $e^{\frac{2x}{m\pi}}$, tendent vers la même limite, lorsque le nombre entier n augmente, mais la différence entre les deux résultats doit être expliquée; voici une considération qui lèvera toute difficulte!

Reprenons l'équation dont se tire l'expression de sinus par un produit de facteurs primaires:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum \left[\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right];$$
$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots.),$$

et d'où on conclut en changeant x en $x + \xi$:

$$\cot(x + \xi) = \frac{1}{x + \xi} + \sum \left[\frac{1}{x + \xi - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right].$$

Retranchons membre à membre avec l'égalité:

$$\cot a = \frac{1}{a} + \sum \left[\frac{1}{a - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right],$$

où a désigne une constante arbitraire, on aura ainsi:

$$\cot(x + \xi) - \cot a = \frac{1}{x + \xi} - \frac{1}{a} + \sum \left[\frac{1}{x + \xi - n\pi} - \frac{1}{a - n\pi}\right],$$

et plus simplement:

$$\cot(x + \xi) - \cot a = \sum \left[\frac{1}{x + \xi - n\pi} - \frac{1}{a - n\pi}\right],$$

en supposant maintenant $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc.

De la se tire si nous intégrons depuis $x = 0$:

$$\log \frac{\sin(x + \xi)}{\sin \xi} - x \cot a = \sum \left[\log\left(1 - \frac{x}{n\pi - \xi}\right) + \frac{x}{n\pi - a}\right],$$

et par conséquent:

$$\frac{\sin(x + \xi)}{\sin \xi} = e^{x \cot a} \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi - \xi}\right) e^{\frac{x}{n\pi - a}}\right].$$

La quantité a dans cette formule est quelconque, on peut même la prende égale à zéro. Qu'on mette à part en effet le facteur correspondant à $n = 0$ qui est seul à considérer dans ce cas $\left(1 + \frac{x}{\xi}\right) e^{-\frac{x}{a}}$; on observera que pour $a = 0$ la

différence $\cot a - \frac{1}{a}$ s'évanouit, de sorte qu'on obtient alors :

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi} = \left(1+\frac{x}{\xi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{x}{n\pi-\xi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right].$$

Ce résultat conduit en supposant $\xi = \frac{\pi}{2}$, à l'expression considérée plus haut :

$$\cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right].$$

Je change ensuite ξ en $\xi+\frac{\pi}{2}$ et a en $a+\frac{\pi}{2}$, on trouve ainsi en posant $m = 2n-1$:

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi} = e^{-x\,\mathrm{tg}\,a}\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi-\xi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi-a}}\right]$$

$$(m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots.),$$

d'où pour $\xi = 0$ et $a = 0$:

$$\cos x = \Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi}}\right].$$

On voit donc que les deux expressions différentes que nous avions remontrées s'accordent, puisqu'elles ne sont que des cas particuliers d'une formule plus générale.